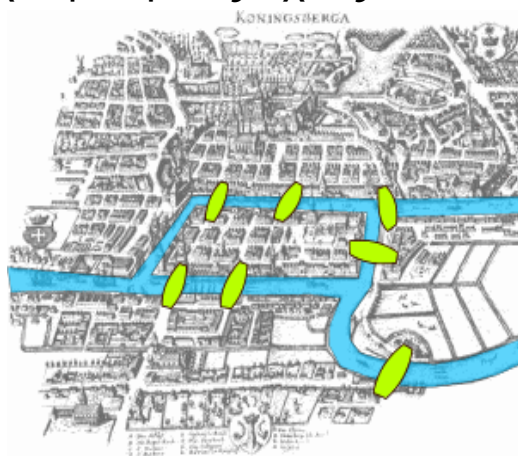


Οι 7 Γέφυρες του Königsberg

Αλεξάνδης Γεώργιος Β1

Σήμερα, ενδεχομένως να δυσκολευτεί κάποιος να εντοπίσει την πόλη του Königsberg στον χάρτη. Ωστόσο, η γεωγραφία αυτής της μεσαιωνικής γερμανικής πόλης αποτέλεσε την αφορμή για να αναπτυχθεί ένας νέος κλάδος των Μαθηματικών, η «**Θεωρία Γράφων**».

Η πόλη του Königsberg ήταν χτισμένη στις όχθες του ποταμού Pregel, στα νερά του οποίου υπήρχαν δύο νησιά. Τόσο οι απέναντι όχθες όσο και τα νησιά συνδέονταν μεταξύ τους με 7 γέφυρες. Το 1735, ο μαθηματικός **Carl Euler** εξέτασε έναν γνωστό γρίφο, το πρόβλημα των 7 γεφυρών του Königsberg. Συγκεκριμένα, προσπαθούσε να εντοπίσει μία διαδρομή που θα μπορούσε να ακολουθήσει ένας επισκέπτης, ώστε να **περιπλανηθεί στις δύο όχθες και στα δύο νησιά, διασχίζοντας και τις 7 γέφυρες, από μία μόνο φορά την καθεμία**.

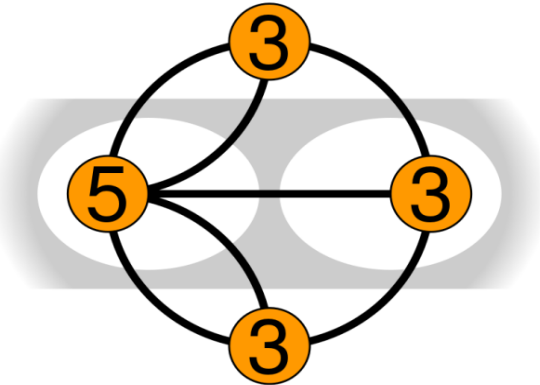


Ο Euler, παρόλο που προβληματίστηκε βαθιά και εξέτασε ενδελεχώς το ζητούμενο, αδυνατούσε να βρει μία κατάλληλη διαδρομή. Για αυτό, το 1736, συνέταξε μία επιστολή στον φίλο του, τον μεγάλο μαθηματικό Leonhard Euler, παροτρύνοντάς τον να ασχοληθεί με το πρόβλημα. Ο Euler, αρχικά απέρριψε την πρόταση, θεωρώντας το πρόβλημα άσχετο με τα Μαθηματικά. Όμως, όσο και αν προσπαθούσε και ο ίδιος, δεν μπορούσε να διατυπώσει μία λύση. Η προσπάθεια για την επίλυση του προβλήματος οδήγησε τον Euler στην **ανάπτυξη ενός νέου μαθηματικού κλάδου, που ο ίδιος ονόμασε Γεωμετρία Θέσης**, η

οποία εξελίχθηκε στον κλάδο που, πλέον, αποκαλείται «Θεωρία Γράφων».

Αρχικά, ο Euler επεσήμανε ότι η επιλογή της διαδρομής εντός κάθε κομματιού ξηράς είναι αδιάφορη, ενώ η ακολουθία των γεφυρών που θα διασχιστούν είναι το μόνο σημαντικό στοιχείο σε μία διαδρομή. Αυτή η διαπίστωση του επέτρεψε να απλοποι-

ήσει το πρόβλημα, απαλλάσσοντάς το από περιττά στοιχεία. Έτσι, **κάθε κομμάτι ξηράς αντικαταστάθηκε από έναν κόμβο και κάθε γέφυρα από ένα άκρο**, με αποτέλεσμα να είναι εμφανές μόνο ποιο

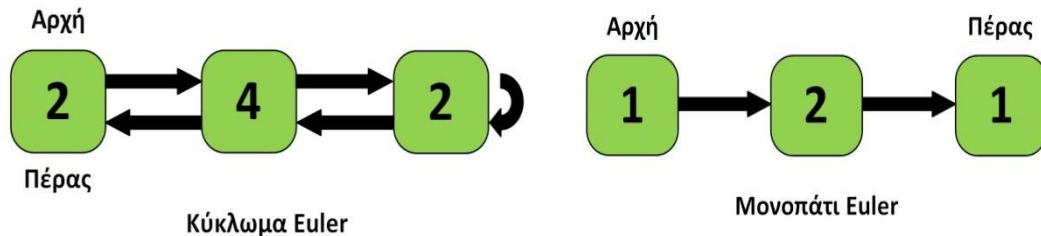


κομμάτι ξηράς συνδέεται με ποια γέφυρα. Η μαθηματική κατασκευή που προέκυψε ήταν ένας Γράφος (εξ ου και η θεμελίωση της Θεωρίας Γράφων). Καθώς το μόνο σημαντικό στοιχείο είναι οι κόμβοι και ο αριθμός των άκρων που αντιστοιχούν σε καθέναν από αυτούς, το σχήμα των απεικονίσεων μπορεί να παραμορφωθεί, χωρίς να χάσει ο Γράφος τις ιδιότητές του.

Έπειτα, ο Euler διαπίστωσε ότι, αν εισέλθει κάποιος σε έναν κόμβο (εκτός από την αρχή και το τέλος της διαδρομής, δηλαδή εκτός ενός τερματικού κόμβου) από μία γέφυρα, πρέπει να εξέλθει από μία άλλη. Άρα, ο αριθμός των γεφυρών από τις οποίες εισέρχεται κάποιος σε έναν (μη τερματικό) κόμβο ισούται με τον αριθμό των γεφυρών από τις οποίες θα εξέλθει από αυτόν. Συνεπώς, **ο αριθμός των γεφυρών σε έναν τέτοιο κόμβο πρέπει να είναι άρτιος. Ωστόσο, υπενθυμίζεται ότι στο πρόβλημα, όλοι οι κόμβοι έχουν περιττό αριθμό άκρων**. Καθώς μόνο δύο κόμβοι μπορούν να λειτουργήσουν ως αρχή και τέλος σε μία διαδρομή, το πρόβλημα καθίσταται μη επιλύσιμο.

Απλούστερα, οι μόνες δυνατές διαδρομές σε ένα πρόβλημα αυτού του είδους κατατάσσονται σε **δύο κατηγορίες**:

Στην πρώτη, μόνο ο αρχικός και ο τελικός κόμβος συνδέεται με περιττό αριθμό γεφυρών, δημιουργώντας ένα Μονοπάτι του Euler. Στην δεύτερη, όλοι οι κόμβοι συνδέονται με άρτιο αριθμό γεφυρών, με αποτέλεσμα να ταυτίζεται η αρχή και το πέρας και να σχηματίζεται ένα Κύκλωμα Euler.



Επομένως, **το πρόβλημα καθίσταται επιλύσιμο με την αφαίρεση μίας γέφυρας**. Το 1945, κατά την αντεπίθεση στο Ανατολικό Μέτωπο του Δευτέρου Παγκοσμίου Πολέμου, **η σοβιετική αεροπορία κατεδάφισε δύο από τις γέφυρες, δημιουργώντας ένα Μονοπάτι Euler**. Οι βομβαρδισμοί αυτοί έσβησαν το Königsberg από τον χάρτη. Η πόλη ανεγέρθη και, **πλέον, είναι η σημερινή ρωσική πόλη του Kaliningrad**. Αν και το Königsberg έπαψε να υπάρχει, αυτή η ιδιαιτερότητα της γεωγραφίας του προκάλεσε την ανάπτυξη της «Θεωρίας Γράφων», εφαρμογές της οποίας εντοπίζονται στη Φυσική, στη Χημεία, στη Βιολογία, στην Πληροφορική και σε πολλά άλλα πεδία.